Nuevas desigualdades integrales para funciones diferenciables (h,m)-convexas a través de derivadas generalizadas tipo Caputo

Paulo Matias Guzmán
Universidad Nacional del Nordeste - Facultad de Ciencias Agrarias - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura, Argentina
guzmanpaulomatias@gmail.com

En este trabajo obtenemos nuevas desigualdades integrales del tipo Hermite-Hadamard, utilizando derivadas generalizadas del tipo Caputo. A lo largo del trabajo, vemos que varios resultados reportados en la literatura son casos particulares de los presentados aquí.

En Matemática, la noción de función convexa juega un papel muy destacado, debido a sus múltiples aplicaciones y sus superposiciones teóricas con diversas otras áreas de la ciencia.

Una de las desigualdades más importantes, para funciones convexas, es la conocida desigualdad de Hermite-Hadamard:

$$\psi\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right) \leq \frac{1}{\nu_2-\nu_1}\int_{\nu_1}^{\nu_2}\psi(x)dx \leq \frac{\psi(\nu_1)+\psi(\nu_2)}{2}.$$

Esta desigualdad se cumple para cualquier función ψ convexa en el intervalo $[\nu_1,\nu_2]$. Da una estimación del valor medio de una función convexa.

En [2] se presentaron las siguientes definiciones:

Sea $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ una función no negativa, $h\neq 0$ y $\psi: I=[0,+\infty)\to[0,+\infty)$. Si la desigualdad

$$\psi\left(\tau\xi+m(1-\tau)\varsigma\right) \leq h^s(\tau)\psi(\xi)+m(1-h^s(\tau))\psi\left(\frac{\varsigma}{m}\right)$$

se cumple para todo $\xi,\varsigma\in I$ y $\tau\in[0,1]$, donde $m\in[0,1]$, $s\in[-1,1]$, entonces la función ψ se llama (h,m)-convexa modificada del primer tipo en I.

Sea $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ una función no negativa, $h\neq 0$ y $\psi: I=[0,+\infty)\to[0,+\infty)$. Si se cumple la desigualdad

$$\psi\left(\tau\xi+m(1-\tau)\varsigma\right) \leq h^s(\tau)\psi(\xi)+m(1-h(\tau))^s\psi\left(\frac{\varsigma}{m}\right)$$

para todo $\xi,\varsigma\in I$ y $\tau\in[0,1]$, donde $m\in[0,1]$, $s\in[-1,1]$, entonces la función ψ se llama (h,m)-convexa modificada del segundo tipo en I.

Los operadores diferenciales que utilizaremos en nuestro trabajo son los siguientes:

Sean $\alpha>0$, y $\alpha\neq 1,2,3,\ldots$, $n=[\alpha]+1$, $f\in AC^n[a,b]$, el espacio de funciones que tienen las n-ésimas derivadas absolutamente continuas. Las derivadas generalizadas de Caputo del lado derecho y del lado izquierdo de orden α se definen de la siguiente manera:

$$\left({}^C D^w_{\nu_1+}f\right)(x) = \int_{\nu_1}^{x} w(x-t)f^{(n)}(t)dt, x>\nu_1$$

$$\left({}^C D^w_{\nu_2-}f\right)(x) = \int_{x}^{\nu_2} w(t-x)f^{(n)}(t)dt, \nu_2>x.$$

En este trabajo obtenemos diferentes variantes de la desigualdad de Hermite-Hadamard, en el marco de las funciones modificadas (h,m)-convexas, mediante operadores generalizados de la Definición última.

Referencias

[1] A. Atangana, D. Baleanu, New fractional derivatives with non-local and non-singular kernel: theory and application to Heat transfer model. Therm. Sci. 20, 763–769 (2016).

[2] B. Bayraktar, J. E. Nápoles V., A note on Hermite-Hadamard integral inequality for (h,m)-convex modified functions in a generalized framework, submited.

[3] A. M. Bruckner, E. Ostrow, Some function classes related to the class of convex functions, Pacific J. Math. 12 (1962), 1203-1215.

[4] M. Caputo, Elasticità e Dissipazione, Bologna: Zanichelli, 1969.

[5] M. Caputo, M. Fabrizio, A new definition of fractional derivative without singular kernel, Prog. Fract. Differ. Appl. 1 (2) (2015) 73–85

[6] R. Díaz, E. Pariguan, On hypergeometric functions and Pochhammer k-symbol. Divulg. Mat. 15(2), 179-192 (2007).

[7] G. Farid, A. Javed, A. U. Rehman, M. I. Qureshi, On Hadamard-type inequalities for differentiable functions via Caputo k-fractional derivatives, Cogent Mathematics (2017), 4: 1355429 https://doi.org/10.1080/23311835.2

[8] P. M. Guzmán, J. E. Nápoles V., Y. Gasimov, Integral inequalities within the framework of generalized fractional integrals, Fractional Differential Calculus, Volume 11, Number 1 (2021), 69-84 doi:10.7153/fdc-2021-11-05