Politopos aleatorios y razón de volumen

Mariano Merzbacher
Universidad de Buenos Aires, Argentina
mmerzbacher@gmail.com

La *razón de volumen* del par de cuerpos convexos K y L de $\mathbb{R}^n$ se define como

$$\mathrm{vr}(K, L) := \text{ínf} \left\{ \left(\frac{|K|}{|T(L)|} \right)^{\frac{1}{n}} : T(L) \text{ está contenido en } K \right\},$$

dónde el ínfimo (en realidad un mínimo) es tomado sobre todas las transformaciones afines T. Esta cantidad resulta un invariante afín que permite medir cuán bien puede aproximarse volumétricamente un cuerpo dado por una imagen afín de otro.

Definimos la *máxima razón de volumen* de un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ como $\mathrm{lvr}(K) := \sup_{L \subset \mathbb{R}^n} \mathrm{vr}(K, L)$, donde el supremo se toma sobre todos los cuerpos convexos L. Mostraremos cómo aplicar el método probabilístico y algunas estimaciones de volumen de politopos para probar la siguiente cota que resulta ajustada en general: $c\sqrt{n} \leq \mathrm{lvr}(K)$, para *todo* cuerpo K (donde $c > 0$ es una constante absoluta). Este resultado mejora la cota anteriormente conocida que es del orden de $\sqrt{\frac{n}{\log\log(n)}}$. Problemas similares pueden plantearse considerando la razón de volumen entre proyecciones o secciones de dos cuerpos convexos. Contaremos algunos resultados recientes que obtuvimos al respecto.

Trabajo en conjunto con Daniel Galicer (Universidad de Buenos Aires, Argentina), Alexander Litvak (University of Alberta, Canada) y Damián Pinasco (Universidad T. Di Tella, Argentina).