Pesos C_p locales y conjuntos homogéneos localmente

Federico Augusto Campos
IMAL, UNL-CONICET, Santa Fe, Argentina
raizdeacero@gmail.com

En esta presentación, consideraremos un espacio métrico (X,d) con la propiedad de homogeneidad débil y un abierto propio $\Omega \subset X$ tal que las bolas contenidas en él son conjuntos conexos. Para cada $\beta \in (0,1)$, se tomará la familia de bolas $\mathcal{F}_\beta = \{B(x,r) : x \in \Omega, r \in (0, \beta d(x,\Omega^c)]\}$. Además, Ω estará provisto de una medida de Borel μ que duplica sobre alguna familia $\mathcal{F}_\beta$. Ahora, si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, se define la función maximal β-local de f con respecto a μ como

$$\mathcal{M}_\beta f(x) = \sup_{B \in \mathcal{F}_\beta : x \in B} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| d\mu.$$

Se dirá que $w \geq 0$ en c. t. p. de Ω es un peso $\mathcal{C}_p^\beta$, con $p \in (0,\infty)$, si existen constantes positivas C, θ tales que, para cualesquiera $B \in \mathcal{F}_\beta$ y $E \subset B$ medible, se tiene

$$\int_E w\ d\mu \leq C \left(\frac{\mu(E)}{\mu(B)} \right)^\theta \int_\Omega (\mathcal{M}_\beta \chi_B)^p\, w\ d\mu\ .$$

También, para $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, definimos la función maximal sharp β-local de f con respecto a μ como

$$\mathcal{M}_\beta^{\#} f(x) = \sup_{B \in \mathcal{F}_{\beta/2} : x \in B} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f - f_B| d\mu + \sup_{B \in \mathcal{F} - \mathcal{F}_{\beta/2} : x \in B} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| d\mu\ .$$

En reuniones anteriores de la UMA mostramos que, bajo la suposición de que el espacio métrico (X,d) tiene la propiedad de que para ciertas intersecciones de bolas hay una dilatación de una bola dentro de la intersección que contiene a una de ellas (lo cual $\mathbb{R}^n$ lo verifica) y que con la medida μ hay diferenciación de Lebesgue en Ω, dados $q \in (1,\infty)$, $p \in (1,q)$, $\beta \in (0,1)$, existen $\gamma \in (0,\beta)$ y $\gamma' \in (0,\gamma)$ tales que, si $w \in \mathcal{C}_q^\gamma$, hay una constante C tal que

$$\int_\Omega (\mathcal{M}_{\gamma'} f)^p\, w\ d\mu \leq C \int_\Omega \left(\mathcal{M}_\beta^{\#} f \right)^p w\ d\mu$$

para cualquier $f \in L^\infty(\Omega,\mu)$ con soporte en una bola de $\mathcal{F}_{\gamma'}$. También se ha mostrado en presentaciones previas que la desigualdad anterior es una condición suficiente para que un peso esté en la clase $\mathcal{C}_p^\beta$.

Como en [1] y [2], consideramos las siguientes clases de Muckenhoupt locales.

Definición 1: Sea $w \in L^1_{loc}(\Omega)$ no-negativo en c. t. p. de Ω y $p \in (1,\infty)$. Diremos que w es un peso en A_p^β si hay una constante C tal que, para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$,

$$\left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B w\ d\mu \right) \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B w^{\frac{-1}{p-1}} d\mu \right)^{p-1} \leq C\ .$$

Para $p = 1$, diremos que w es un peso en A_1^β si hay una constante C tal que, para toda $B \in \mathcal{F}_\beta$,

$$\left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B w\ d\mu \right) \left(\inf_{x \in B} w(x) \right)^{-1} \leq C\ ,$$

donde el ínfimo se toma en c. t. p. de B. Para $p = \infty$, se definirá entonces

$$A_\infty^\beta = \bigcup_{q \in [1,\infty)} A_q^\beta.$$

Ahora, En [3], dado $A \subset \mathbb{R}$ medible (Lebesgue), se dice que A es homogéneo si hay una constante $\sigma \in (0,1]$ tal que

$$|A \cap (x-r, x+r)| \geq \sigma r \ ,$$

para todo $r \in (0,\infty)$ y c. t. p. $x \in A$. En tal artículo se ve que la condición $\mathcal{C}_p$ (en $\mathbb{R}$) caracteriza (en un cierto sentido) a los conjuntos homogéneos. Nuestro objetivo será obtener una caracterización análoga para la clase $\mathcal{C}_p^{\beta}$. Con este fin damos la siguiente definición.

Definición 2: Sea $A \subset \Omega$. Diremos que A es homogéneo localmente (con respecto a la medida μ) si, dado $\beta \in (0,1)$, hay un $\sigma_\beta \in (0,1]$ tal que

$$\mu\left(A \cap B\left(x,r\right)\right) \geq \sigma_\beta \mu\left(B\left(x,r\right)\right) \ ,$$

para c. t. p. $x \in A$ y todo $r \in (0, \beta\rho(x)]$.

Para obtener nuestros resultados, pedimos además que para la medida μ existan constantes positivas C, θ y θ' (que pueden depender de β) tales que, para todos $t \geq 1$ y $B \in \mathcal{F}_{\beta/t}$,

$$C^{-1} t^{\theta'} \mu(B) \leq \mu(tB) \leq C t^{\theta} \mu(B). \tag{1}$$

Ahora, enunciamos nuestro primer resultado.

Teorema 1: Sean $w \in A_\infty^\beta$ y $A \subset \Omega$ para el cual hay un $\widetilde{A} \subset A$ tal que $\mu\left(\widetilde{A}\right) = 0$ y $A - \widetilde{A}$ es homogéneo localmente con respecto a μ. Entonces, $w\chi_A \in \mathcal{C}_p^\beta$ para todo $p \in (0,\infty)$.

También, por los resultados en [2] podemos deducir que, si $w \in A_\infty^\beta$ y ν es la medida inducida por w con respecto a μ ($d\nu = w\ d\mu$) entonces $w^{-1} \in A_\infty^\beta$ con respecto a la medida ν y existen constantes $C \geq 1$ y $\varepsilon \in (0,1)$ tales que, para cualesquiera $B \in \mathcal{F}_\beta$ y $E \subset B$ medible, se tiene

$$\int_E w^{-1}\ d\nu \leq C \left(\frac{\nu\left(E\right)}{\nu\left(B\right)}\right)^{\varepsilon} \int_B w^{-1}\ d\nu \ .$$

Así, con esta observación obtendremos el siguiente recíproco parcial del Teorema 1.

Teorema 2: Sean $\beta \in (0,1)$ y $w \in A_\infty^\beta$. Entonces, hay un $\beta' \in (0,\beta)$ tal que, para todo $\alpha \in (0,\beta']$, si θ_w y θ'_w son exponentes que verifican (**??**) sobre $\mathcal{F}_\alpha$ con la medida ν y $w\chi_A \in \mathcal{C}_p^\alpha$ para algún $p \in \left(\theta_w \left(\theta'_w \varepsilon\right)^{-1}, \infty\right)$, existe un $\widetilde{A} \subset A$ tal que $\mu\left(\widetilde{A}\right) = 0$ y $A - \widetilde{A}$ es homogéneo localmente con respecto a μ.

Finalmente, veremos también que cierta condición adicional sobre un peso en $\mathcal{C}_p^\beta$ implica que esté en A_∞^β.

Trabajo en conjunto con Oscar Salinas (IMAL, UNL-CONICET, Santa Fe, Argentina) y Beatriz Viviani (IMAL, UNL-CONICET, Santa Fe, Argentina).

Referencias

[1] Harboure, Eleonor, Oscar Salinas, and Beatriz Viviani. Local maximal function and weights in a general setting. Mathematische Annalen 358, 3-4 (2014): 609-628.

[2] Campos, Federico Augusto and Salinas, Oscar Mario and Viviani, Beatriz Eleonora. Characterizations of local A_∞ weights and applications to local singular integrals. To appear in in Revista de la Unión Matemática Argentina en Homenaje a Eleonor Harboure, (2023).

[3] Kahanpää, L., and L. Mejlbro. Some new results on the Muckenhoupt conjecture concerning weighted norm inequalities connecting the Hilbert transform with the maximal function. Danmarks Tekniske Hojskole. Matematisk Institut, 1983.