Unicidad de Mejores Aproximantes en Espacios de Orlicz

Juan Costa Ponce
IMASL-UNSL-CONICET, Argentina
costaponcejuan@gmail.com

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ el conjunto de todas las clases μ-equivalentes de funciones $\mathcal{A}$-medibles en un conjunto cerrado y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}$.

Sea $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función convexa tal que $\Phi(0) = 0$, $\Phi(t) > 0$ si $t > 0$.

Adicionalmente, se supondrá que la función Φ cumple con la condición Δ_2, es decir que exista una constante K tal que para todo x en el dominio de Φ, vale $\Phi(2x) \leq K\Phi(x)$.

Entonces

$$L^\Phi(\Omega) := \left\{ f \in \mathcal{M} : \int_\Omega \Phi(|f|) d\mu < \infty \right\}$$

es un espacio de Orlicz.

Dado un conjunto $S \subset L^\Phi(\Omega)$, un elemento $s^* \in S$ es llamado una mejor Φ-aproximación de $f \in L^\Phi(\Omega)$ de la clase aproximante S, si y sólo si

$$\int_\Omega \Phi(|f - s^*|) d\mu = \inf_{s \in S} \int_\Omega \Phi(|f - s|) d\mu$$

En [1] se demostró que basta pedir que Φ sea continua por izquierda y que la clase aproximante $S \subset L^\infty(\Omega)$ sea un subespacio de dimensión finita, para que cualquier $f \in L^\Phi$ tenga al menos un mejor aproximante $s^* \in S$.

La unicidad del mejor aproximante es un problema que ha sido extensamente estudiado en [3],[4],[5] y particularmente en [2] se desarrolla un panorama general sobre el estado de la cuestión.

Se plantea un problema geométrico al considerar Φ convexa pero no estrictamente convexa. Luego se prueba la unicidad para clases aproximantes muy generales y se extienden resultados al espacio L^Φ algunos hechos conocidos en L^1 y presentados en [3] y [2].

Finalmente, se discuten algunos interrogantes abiertos.

Trabajo en conjunto con Dr. Sergio Favier (IMASL-UNSL-CONICET).

Referencias

[1] A. Benavente, S. Favier, F. Levis, Existence and Characterizations of best ϕ-Approximations by Linear Subspaces, De Gruyter Adv. Pure Appl. Math (2017).

[2] Cheney, E. W., Wulbert, D. E. (1969). The Existence and Unicity of Best Approximations. MATHEMATICA SCANDINAVICA, 24, 113–140. https://doi.org/10.7146/math.scand.a-10925

[3] J. R. Rice, The Approximation of Functions, vol. I. Addison-Esley Pub. Co. (1964).

[4] L. L. Schumaker, Spline Functions, Basic Theory, Cambridge University Press (2007).

[5] A. Pinkus, On L^1 Approximation, Cambridge University Press (1989).