Descomposición atómica para el espacio de Hajlasz de funciones con gradiente generalizado en L^1.

Ricardo Durán
UBA - CONICET, Argentina
rduran@dm.uba.ar

Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, consideramos la condición introducida por Hajlasz [1],

$$|f(x) - f(y)| \leq (g(x) + g(y))|x - y|$$

con $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, y llamamos $D(f)$ al conjunto de todas las funciones $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ que cumplen esta desigualdad. Siguiendo a Hajlasz definimos

$$M^{1,p} = \{f \in L^p(\mathbb{R}^n) \colon \exists g \in D(f)\}$$

el cual es un espacio de Banach con la norma dada por

$$\|f\|_p + \|f\|_{\dot{M}^{1,p}}$$

donde $\|f\|_{\dot{M}^{1,p}} := \text{ínf}_{g \in D(f)} \|g\|_p$.

Es sabido que para $p > 1$ vale que $M^{1,p}$ coincide con el el espacio de Sobolev clásico $W^{1,p}$. La situación es diferente cuando $p = 1$. En este caso se sabe que $M^{1,1} = H^{1,1}$ siendo éste el espacio de Hardy-Sobolev de funciones de $L^1(\mathbb{R}^n)$ con derivadas primeras en el espacio de Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$.

El objetivo de esta charla es mostrar que las técnicas introducidas por Macías y Segovia en [2] pueden aplicarse para obtener una descomposición atómica para funciones de $M^{1,1}$.

Decimos que una función a es un átomo si tiene soporte contenido en una bola B y es Lipschitz con constante acotada por $1/|B|$.

Demostramos que si $f \in M^{1,1}$ existen una sucesión de átomos a_j y una sucesión numérica μ_j tales que

$$f = \sum_j \mu_j a_j$$

con convergencia en $\dot{M}^{1,1}$ y tal que

$$\sum_j |\mu_j| \leq C\|f\|_{\dot{M}^{1,1}}$$

De esta descomposición resultan inmediatamente demostraciones alternativas de la igualdad $M^{1,1} = H^{1,1}$ y de la equivalencia entre $\|f\|_{\dot{M}^{1,1}}$ y $\|Nf\|_1$ siendo Nf la maximal de Calderón.

Referencias

[1] P. Hajlasz, Sobolev spaces on an arbitrary metric space, Potential Anal. 5 (1996), 403-415.

[2] R. A. Macías and C. Segovia, A decomposition into atoms of distributions on spaces of homogeneous type, Advances in Math. 33 (1977), 271-309.