Sobre la converencia al dato inicial para el problema del calor en el grupo de Heisenberg.

Isolda Eugenia Cardoso
Universidad Nacional de Rosario, Argentina
isolda@fceia.unr.edu.ar

El núcleo del calor $q_s(z,t)$ para el sublaplaciano $\mathcal{L}$ en el grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ tiene una expresión integral

$$q_s(z,t) = \frac{1}{2(4\pi s)^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\sinh \lambda}\right)^n e^{-\frac{|z|^2}{4s}\lambda \coth \lambda} e^{i\lambda \frac{t}{s}} d\lambda,$$

que a diferencia del núcleo del calor para el laplaciano euclídeo, en la variable central t no hay decaimiento gaussiano. En el presente trabajo hallamos condiciones de integrabilidad sobre el dato inicial f para la existencia de soluciones al PVI del calor asociado a $\mathcal{L}$ en $\mathbb{H}_n$:

$u_s(z,t,s) = -\mathcal{L}u(g,s), \qquad (z,t,s) \in \mathbb{H}_n \times (0,S),$

$u(z,t,0) = f(z,t), \qquad (z,t) \in \mathbb{H}_n.$

Para esto, utilizamos algunas estimaciones que involucran propiedades geométricas del espacio subyacente, en particular de la estructura subriemanniana de $\mathbb{H}_n$ que acarrea la distancia de Carnot-Caratheodory d, para la cual se tiene que $d(z,t)^2 \sim |z|^2 + |t|$. Así, tenemos una estimación bilateral de $q_s(x,t)$ por una función $\varphi_s(z,t)$ que depende de $d(z,t)$ y de $|z|$ (ver [1],[2])

$$\phi_s(z,t) = \frac{1}{s^{n-1}} e^{-\frac{d(z,t)^2}{4s}} \left(1 + \frac{d(z,t)^2}{s}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{|z|d(z,t)}{s}\right)^{-n+\frac{1}{2}}.$$

A partir de dicha función obtenemos las condiciones buscadas y además logramos definir una clase de pesos $D_p(\mathcal{L})$ para los cuales las soluciones existan a.e. cuando el tiempo s se aproxima a cero. Exploramos además la pregunta natural acerca de la acotación del operador maximal local asociado. Este tipo de problemas para el caso euclídeo y diferentes operadores ha sido estudiado en [3],[4],[5],[6] y recientemente en espacios más generales: árboles homogéneos en [7] y en espacios simétricos de tipo no compacto en [8].

Referencias

[1] H-Q Li, Estimations asymptotiques du noyau de la chaleur sur les groupes de Heisenberg. Comptes Rendus Mathématique, 751(8):477-544 (2007).

[2] H-Q Li, Y. Zhang, Revisiting the heat kernel on isotropic and nonisotropic Heisenberg groups. Communications in Partial Differential Equations, 44(6):467-503, (2019).

[3] S. Hartzstein, J. L. Torrea, B. Viviani, A note on the convergence to initial data of heat and Poisson equations. Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013), no. 4, 1323–1333.

[4] Abu-Falahah, P. R. Stinga J. L. Torrea, A note on the almost everywhere convergence to initial data for some evolution equations, Potential Anal. 40 (2014), no. 2, 195–202.

[5] G. Garrigós, S. Hartzstein, T. Signes, J.L. Torrea, B. Viviani, Pointwise convergence to initial data of heat and Laplace equations, Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016), no. 9, 6575–6600.

[6] I. Cardoso, On the pointwise convergence to initial data of heat and Poisson problems for the Bessel operator, J. Evol. Equ. 17 (2017), no. 3, 953–977.

[7] I. Alvarez-Romero, B. Barrios, J. J. Betancor, Pointwise convergence of the heat and subordinates of the heat semigroups associated with the Laplace operator on homogeneous trees and two weighted Lp maximal inequalities, (Feb 2022) arXiv:2202.11210v1

[8] T. Bruno, E. Papageoriou, Pointwise convergence to initial data for some evolution equations on symmetric spaces, (July 2023), arXiv:2307.09281.