Homogeneidad y Principios de Incertidumbre Aditivos y Multiplicativos

Joaquín Toledo
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral- IMAL, CONICET, UNL, CCT CONICET Santa Fe,
Colectora Ruta Nac. N 168, Paraje El Pozo, Argentina
joaquintoledo789@gmail.com

El Principio de Incertidumbre de la Mecánica Cuántica que, una vez admitida la formulación por medio de la Teoría de Operadores, es un Teorema sobre la Transformada de Fourier, puede formularse para funciones f en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en la forma multiplicativa

$$\|xf(x)\|\|\xi\widehat{f}(\xi)\| \geq \frac{1}{4\pi}\|f\|^2, \tag{1}$$

donde $\|.\|$ denota la norma $L^2(\mathbb{R}^n)$. En [3] Cowling y Price demuestran que la forma (1) del principio de incertidumbre es equivalente a la forma aditiva siguiente

$$\|xf(x)\|^2 + \|\xi\widehat{f}(\xi)\|^2 \geq \frac{1}{2\pi}\|f\|^2. \tag{2}$$

El hecho de que la desigualdad (1) implica la desigualdad (2) es inmediato. Que (2) implica (1) para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, es en cambio más sutil y se basa en propiedades de homogeneidad de la tranformada de Fourier.

Cuando el principio de incertidumbre se explora con el análisis armónico generalizado en contextos geométricos no euclídeos, como los grafos métricos (ver [2]), la ausencia de homogeneidades naturales, impide una prueba de la equivalencia entre los análogos de (1) y (2) en estos contextos generales y la forma aditiva (2) resulta válida aunque en general (1) no pueda probarse.

Un caso particular que se plantea en un contexto continuo pero en el que hay una estructura discreta y un principio de incertidumbre naturales es el de análisis de Fourier generalizado para las wavelets de Haar.

En [1] (ver también [4]) se prueba que para $s \in (0,1)$ existe $c > 0$ tal que para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ con $\|f\|_2 = 1$

$$\mathcal{E}_s(f)\mathcal{Q}_s(f) \geq c, \tag{3}$$

donde

$$\mathcal{Q}_s(f) = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+} \left[\delta^{2s}(x,y)f(x)f(y)\right]\frac{dxdy}{\delta(x,y)},$$

$$\mathcal{E}_s(f) = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+} \left|\frac{f(x)-f(y)}{\delta(x,y)^s}\right|^2\frac{dxdy}{\delta(x,y)},$$

y $\delta(x,y)$ es la métrica diádica definida en $\mathbb{R}^+$ por

$$\delta(x,y) = \text{ínf}\{|I| : x,y \in I, I \in \mathcal{D}\},$$

siendo $\mathcal{D}$ la clase de los intervalos diádicos de $\mathbb{R}^+$.

En este trabajo demostramos que una homogeneidad diádica intrínseca al sistema de Haar nos permite probar el resultado siguiente

Teorema: Son equivalentes

(i) $\mathcal{E}_s^2(f) + \mathcal{Q}_s^2(f) \geq c$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$

(ii) $2\mathcal{E}_s(f)\mathcal{Q}_s(f) \geq c$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$

El Teorema precedente y (3) permiten probar el siguiente resultado.

Corolario: Existe $c > 0$ tal que la desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+}\left|\frac{f(x)-f(y)}{\delta(x,y)^s}\right|^2\frac{dxdy}{\delta(x,y)}+\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+}\left[\delta^{2s}(x,y)f(x)f(y)\right]\frac{dxdy}{\delta(x,y)}\geq c$$

vale para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ con $\|f\|_2 = 1$.

Trabajo en conjunto con Hugo Aimar (IMAL, CONICET, UNL, CCT CONICET Santa Fe, Argentina) y Ivana Gómez (IMAL, CONICET, UNL, CCT CONICET Santa Fe, Argentina).

Referencias

[1] Hugo Aimar, Pablo Bolcatto, and Ivana Gómez. On fractional uncertainty: a dyadic approach. Applicable Analysis, 100(5):975–991, 2021.

[2] John J. Benedetto and Paul J. Koprowski. Graph theoretic uncertainty principles. In 2015 International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA), pages 357–361, 2015.

[3] Michael G. Cowling and John F. Price. Bandwidth versus time concentration: The Heisenberg–Pauli–Weyl inequality. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 15(1):151–165, 1984.

[4] Joaquín Toledo. Mecánica Cuántica y Wavelets. 2020. Trabajo Final de Licenciatura UNL. https://nube.unl.edu.ar/index.php/s/3qoWxciBcixmxmQ