# Distancia entre espacios métricos de probabilidad y aplicaciones

**Carlos Exequiel Arias**
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral - IMAL, CONICET, UNL, CCT CONICET Santa Fe, Colectora Ruta Nac. N 168, Paraje El Pozo, Argentina
exearias01@gmail.com

Las nociones fundamentales de distancia entre espacios métricos por una parte, y de distancia entre medidas por otra, están bien desarrolladas y han adquirido una relevancia reciente por los trabajos de Misha Gromov en Geometría y por la teoría del Transporte Óptimo. En este trabajo conjugamos estas ideas para definir conceptos de distancias entre espacios métricos con medidas de probabilidad y aplicarlos al análisis de datos de SUBE en AMBA. En particular consideramos la extensión de dos de los conceptos que Misha Gromov introduce en [4], el enfoque Gromov-Lipschitz y el enfoque Gromov-Hausdorff, combinados con varios de los conceptos de distancia entre medidas probabilísticas, en particular con la de Kantorovich - Rubinstein - Wasserstein (Ver[5]). Antecedentes de estas ideas pueden encontrarse en [2]. Para la aplicación al transporte público registrado por SUBE en AMBA usamos [1] y para las métricas difusivas mencionamos los trabajos pioneros de Coifman y Lafon [3].

Sean $(X,d,\mu)$ e $(Y,\delta,\nu)$ dos espacios métricos con $\mu$ y $\nu$ probabilidades borelianas. Sea $\Lambda = \{f : (X,d) \to (Y,\delta)\ bi-Lipschitz\}$ y, si $\Lambda \neq \emptyset$, para cada $f \in \Lambda$ definimos las medidas probabilísticas $\tilde{\mu}_f = \nu \circ f$ y $\tilde{\nu}_f = \mu \circ f^{-1}$. Sea $\rho_X$ una distancia entre medidas probabilísticas en $X$ y $\rho_Y$ una distancia entre medidas probabilísticas en $Y$. Definimos la distancia de **Gromov-Lipschitz** con $\rho_X$ y $\rho_Y$ entre $(X,d,\mu)$ e $(Y,\delta,\nu)$ como

$$d_{GL}^{\rho_X\rho_Y}((X,d,\mu),(Y,\delta,\nu)) = \inf_{f\in\Lambda}\{|\log dil(f)| + |\log dil(f^{-1})| + \rho_X(\mu,\tilde{\mu}_f) + \rho_Y(\nu,\tilde{\nu}_f)\}$$

donde $dil(f) = \sup_{x_1\neq x_2} \frac{\delta(f(x_1),f(x_2))}{d(x_1,x_2)}$ es el coeficiente de dilatación de $f$.

Para el enfoque de **Gromov-Hausdorff** consideramos la familia $\mathcal{Z}$ de todos los espacios métricos $(Z,\partial)$ tales que $(X,d)$ e $(Y,\delta)$ están inmersos isométricamente en $(Z,\partial)$. También consideramos las familias $\mathcal{I}(X,Z)$ e $\mathcal{I}(Y,Z)$ de todas estas inmersiones isométricas $\varphi : X \to Z$ y $\psi : Y \to Z$ respectivamente. Dadas $\varphi \in \mathcal{I}(X,Z)$ y $\psi \in \mathcal{I}(Y,Z)$ consideramos los respectivos "push forward" de $\mu$ y $\nu$ por $\varphi$ y $\psi$ para obtener dos medidas de Borel probabilísticas en $(Z,\partial)$ como $\mu_\varphi = \mu \circ \varphi^{-1}$ y $\nu_\psi = \nu \circ \psi^{-1}$. Entonces como $\mu_\varphi$ y $\nu_\psi$ son medidas de probabilidad en $(Z,\partial)$ podemos calcular, por ejemplo, su distancia de Kantorovich en $(Z,\partial)$ y así definir la distancia de Gromov-Hausdorff entre $(X,d,\mu)$ e $(Y,\delta,\nu)$ como

$$d_{GH}^{K}((X,d,\mu),(Y,\delta,\nu)) = \inf_{\substack{(\mathcal{Z},\partial)\in\mathbb{Z}\\ \varphi\in\mathcal{I}(X,\mathcal{Z})\\ \psi\in\mathcal{I}(Y,\mathcal{Z})}} \max\{d_{H,\partial}(\varphi(X),\psi(Y)), d_{K,\partial}(\mu_\varphi,\nu_\psi)\}$$

donde $d_{H,\partial}$ denota la distancia de Hausdorff entre conjuntos de $Z$ y $d_{K,\partial}$ la de Kantorovich (Wasserstein 1) en $(Z,\partial)$.

Para estas dos cantidades $d_{GL}^{\rho_X\rho_Y}$, $d_{GH}^{K}$, probamos propiedades métricas básicas y las aplicamos al análisis de datos provistos por el sistema SUBE en el AMBA, modelizado por grafos no dirigidos ponderados y con distintos atributos en los vértices, que son casos especiales de espacios métricos con medida probabilística.

*Trabajo en conjunto con Hugo Aimar (IMAL, CONICET, UNL, CCT CONICET Santa Fe, Argentina) y Ivana Gómez (IMAL, CONICET, UNL, CCT CONICET Santa Fe, Argentina).*

**Referencias**

[1] M. F. Acosta, H. Aimar, I. Gómez, and F. Morana, "Diffusive metrics induced by random affinities on graphs. An application to the transport systems related to the COVID-19 setting for Buenos Aires (AMBA)", Trends Comput. Appl. Math. 23 (2022), no. 4, 783–799.

[2] Hugo Aimar, Marilina Carena, Bibiana Iaffei. “Discrete approximation of spaces of homogeneous type”. J. Geom. Anal.19(2009), no.1, 1–18.

[3] Ronald R Coifman and Stéphane Lafon, “Diffusion maps”, Applied and Computational Harmonic Analysis 21 (2006), no. 1, 5–30.

[4] Misha Gromov, “Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces”, Progress in Mathematics, vol. 152, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999, Based on the 1981 French original.

[5] Cédric Villani. “Optimal transport. Old and new.” Grundlehren Math. Wiss., 338[Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 2009.