Un Teorema $T1$ para Operadores Integrales Fraccionarios

Bruno Urrutia
IMAL (CONICET - UNL), Argentina
bruno_m77@hotmail.com

Una herramienta relevante en el marco del estudio de familias de operadores integrales son los teoremas $T1$. En [1] podemos encontrar resultados sin pesos para operadores integrales singulares y fraccionarios, mientras que en [2] se estudia el caso pesado para integrales singulares.

En nuestro trabajo, a través del estudio de operadores maximales, logramos un resultado de acotación de operadores fraccionarios entre espacios de Lebesgue, lo que nos permitió dar un teorema $T1$ con condiciones equivalentes para la acotación de estos operadores en espacios de tipo BMO con pesos.

Sea T un operador integral con núcleo K, esto es

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)f(y)dy, x \in \mathbb{R}^d.$$

Sea $0\nu d$, $1\sigma\infty$, $0\delta \leq 1$. Decimos que un núcleo K es un núcleo ρ-fraccionario de tipo (ν, σ, δ) si, para cada $N0$, existe una constante C_N tal que

$$\left(\frac{1}{R^d}\int_{R|x_0-y|2R} |K(x,y)|^\sigma dy\right)^{1/\sigma} \leq C_N R^{-d+\nu}\left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N},$$

para $|x-x_0|R/2$ y

$$\left(\frac{1}{R^d}\int_{R<|x_0-y|<2R} |K(x,y)-K(x_0,y)|^\sigma dy\right)^{1/\sigma} \leq C_N R^{-d+\nu}\left(\frac{r}{R}\right)^\delta \left(1+\frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N},$$

para $|x-x_0|r\rho(x_0)$ y $rR/2$.

Teorema: Sea T un operador integral con núcleo K, ρ-fraccionario de tipo (ν, σ, δ) y de tipo débil $(1, d/(d-\nu))$. Sean β y μ números fijos tales que $0\nu d$, $0 \leq \beta\delta$ y $1 \leq \mu 1 + \frac{\delta-\nu-\beta}{d}$. Luego, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Existe una constante C tal que la función $T1$ satisface

$$\frac{1}{|B|^{1+\nu/d}}\int_B |T1(y)-(T1)_B|dy \leq C\left(\frac{r}{\rho(x_0)}\right)^{\beta+d(\mu-1)},$$

para toda bola $B = B(x_0, r)$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $0r\rho(x_0)/2$, si $\beta 0$ o $\mu 1$, o

$$\frac{1}{|B|^{1+\nu/d}}\int_B |T1(y)-(T1)_B|dy \leq C\log^{-1}\left(\frac{\rho(x_0)}{r}\right),$$

para toda bola $B = B(x_0, r)$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ y $0r\rho(x_0)/2$, si $\beta = 0$ y $\mu = 1$.

(b) T es acotado de $BMO_\rho^\beta(w)$ en $BMO_\rho^{\beta+\nu}(w)$ for every $w \in F_\sigma^\rho \cap D_\mu^\rho$ con norma del operador dependiendo solo de w a través de las constantes de las clases F_σ^ρ y D_μ^ρ.

(c) T es acotado de $BMO_\rho^\beta(w)$ en $BMO_\rho^{\beta+\nu}(w)$ para pesos de la forma $w(x) = |x-x_0|^{d(\mu-1)}$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, con norma del operador independiente de x_0.

Trabajo en conjunto con Bruno Bongioanni (Universidad Nacional del Litoral, Argentina) y Marisa Toschi (Universidad Nacional del Litoral, Argentina).

Referencias

[1] Tao Ma, Pablo Raúl Stinga, José L. Torrea, and Chao Zhang. Regularity estimates in Hölder spaces for Schrödinger operators via a T1 theorem. Ann. Mat. Pura Appl. (4), 193(2):561–589, 2014.

[2] Bruno Bongioanni, Eleonor Harboure, Pablo Quijano. Weighted inequalities for Schrödinger type singular integrals. J. Fourier Anal. Appl., 25(3):595–632, 2019.