

Fabián Eduardo Levis

Universidad Nacional de Río Cuarto, CONICET, FCEFQyN, Argentina
flevis@exa.unrc.edu.ar

Las derivadas de diversos tipos han sido ampliamente estudiadas por numerosos autores desde finales del siglo XIX. Este concepto encuentra utilidad en muchas ramas de las matemáticas y en sus aplicaciones. Entre las derivadas, se destaca la derivada de Peano como una de las más conocidas. Peano [5] introdujo esta noción a partir de la aproximación de una función mediante polinomios. Otra derivada destacada es la derivada en el sentido L^p , definida por Calderón y Zygmund [1] en el contexto de las ecuaciones diferenciales. Macías y Zó [4] relacionaron el concepto de la derivada en el sentido L^p con el problema de la mejor aproximación local a un punto, centrándose en espacios L^p ponderados.

El problema de encontrar el “mejor” algoritmo para aproximar un conjunto de datos, provenientes de los valores de una función y de sus derivadas en puntos muestrales, se explora en la teoría de la Mejor Aproximación Local. Esta teoría investiga el comportamiento asintótico de la mejor aproximación en pequeñas regiones que rodean los puntos de muestra. Chui, Shisha y Smith [2] presentaron y estudiaron formalmente este problema, introduciendo el concepto de mejor aproximación local de una función en un punto de la recta real utilizando polinomios algebraicos generalizados (espacios de Haar) con respecto a la norma uniforme. Los autores proporcionaron condiciones necesarias y suficientes para la existencia de la mejor aproximación local para todas las funciones diferenciables en el sentido usual hasta un cierto orden.

Recientemente, Ferreyra, Levis y Roldán [3] definieron la derivada de Legendre para funciones reales en $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Como consecuencia, proporcionaron una condición necesaria y suficiente para la existencia de la mejor aproximación local en L^2 utilizando este nuevo concepto de la derivada de Legendre. Además, demostraron que la mejor aproximación local es un polinomio de Taylor generalizado que involucra las derivadas de Legendre.

El objetivo principal de esta comunicación es mostrar una generalización a los espacios de Hilbert de algunos resultados dados en [3]. Precisamente, introducimos un nuevo concepto de derivadas de campos escalares en espacios de Hilbert, generalizando la noción de derivada en el sentido L^p y de derivada de Legendre para funciones reales en $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Estudiamos sus propiedades y caracterizaciones, y como consecuencia, proporcionamos una condición necesaria y suficiente para la existencia de la mejor aproximación local en espacios de Hilbert empleando estos nuevos conceptos de derivadas. Además, demostramos que la mejor aproximación local puede ser representada por un polinomio de Taylor generalizado que involucra las nuevas derivadas generalizadas.

Trabajo en conjunto con Federico D. Kovac (Universidad Nacional de La Pampa, Facultad de Ingeniería, Argentina y Marina. V. Roldán (Universidad Nacional de La Pampa, Facultad de Ingeniería, Argentina.

Referencias

- [1] A. Calderón, A. Zygmund, Local properties of solutions of elliptical partial differential equations, *Studia Math*, 20 (1961) 171-225.
- [2] C.K. Chui, O. Shisha, P.W.Smith, Best local approximation, *J. Approx. Theory* 15 (4) (1975) 371-381.
- [3] D.E. Ferreyra, F.E. Levis, M.V. Roldán, New Approach to Derivatives in L^2 -Spaces, *Numer. Funct. Anal. Optim.* 41 (10) (2020) 1272-1285.
- [4] R. Macías, F. Zó, Weighted Best Local L^p Approximation, *J. Approx. Theory* 42 (1984) 181-192.
- [5] G. Peano, Sulla formula di Taylor, *Atti Accad. Sci. Torino* 27 (1891) 40-46.