Sobre el grado del fibrado tangente de una variedad algebraica

Leonardo Lanciano
UBA, FCEyN, Departamento de Matemática, Argentina
llanciano51@gmail.com

La dimensión y el grado de una variedad algebraica V (de manera abreviada $\dim(V)$ y $\deg(V)$) son los invariantes asociados a variedades más elementales en geometría algebraica y ambas nociones pueden considerarse como medidas de la dificultad en el tratamiento (global, no local) de una variedad V. Geométricamente, la dimensión mide la cantidad de grados de libertad para moverse dentro de V y de manera más precisa la dimensión máxima de una variedad lineal que sea proyección de V. Desde un punto de vista algebraico es simplemente el grado de trascendencia del anillo de la variedad sobre el cuerpo de base (que para nosotros será siempre $\mathbb{C}$ o más generalmente, un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0). Por su parte, la noción de grado intenta generalizar el grado de una ecuación, interesándose por la "sinuosidad" de la variedad V, partiendo de las variedades lineales (que tienen grado 1). Así una posible definición de $\deg(V)$ es el número de puntos que resulta al intersecar V con una variedad lineal general de dimensión complementaria a la de V.

Parece natural entonces que, en general, el grado suela ser más difícil de estimar que la dimensión. La principal herramienta conocida y desarrollada es el Teorema de Bézout (1779) que establece que en condiciones generales el grado de una variedad definida por ecuaciones polinomiales $f_1 = 0, \ldots, f_s = 0$ es igual al producto $\deg(f_1) \ldots \deg(f_s)$. Este teorema ha sido largamente generalizado y ampliado.

En esta comunicación nos ocupamos de estudiar el grado del fibrado tangente TV asociado a una variedad algebraica suave V.

Al intentar estudiar este problema, nos hemos encontrado con que, más allá de las herramientas usuales provenientes del Teorema de Bézout y que dan lugar a estimaciones demasiado gruesas, la obtención de resultados generales parece bastante difícil, si es que estos resultados existen. De todos modos hemos desarrollado familias de ejemplos (principalemente para el caso de curvas y variedades que admiten cierto tipo de parametrizaciones) en las que el grado del fibrado tangente se puede estimar de manera más precisa o al menos diferente de la estimación directa por Bézout. Estos ejemplos nos han permitido incluso proponer algunos resultados conjeturales que no aparecían tan claramente expuestos cuando comenzamos a desarrollar este trabajo. En particular, nos preguntamos si la desigualdad $\deg(TV) \leq \deg(V)^2$ es una estimación general posible.

A continuación describimos brevemente la presentación de la comunicación y sus resultados principales:

• Exhibimos una cota intrínseca general $\deg(TV) \leq (\deg(V))^{n+d+1}$, donde $V \subseteq \mathbb{A}^n$ es una variedad suave y d es la dimensión de V. Demostramos además una desigualdad más precisa $\deg(TV) \leq \deg(V)^2$ para hipersuperficies y para familias infinitas de variedades. Más aún, obtenemos familias infinitas para las que vale la igualdad, es decir $\deg(TV) = \deg(V)^2$.

• Consideramos el caso de curvas paramétricas. Se demuestra que en este caso vale la igualdad $\deg(TV) = 2\deg(V) - 1$. Cuando la parametrización es racional (no polinomial) se obtiene una cota $\deg(TV) \leq 3\deg(V) - 1$. Observar que para estas curvas las cotas son lineales en $\deg(V)$ en lugar de cuadráticas.

• Finalmente, consideramos 2 familias clásicas de variedades: las cuádricas y las curvas planas . En el caso de las cuádricas calculamos exactamente $\deg(TV)$ de acuerdo a su forma normal. Para las curvas planas, aplicando Bernstein-Kushnirenko, damos una estimación de $\deg(TV)$ en términos del volumen mixto de los polítopos generados por los soportes de la ecuación de V y de su derivada total y en particular observamos que para curvas elípticas genéricas se tiene que $\deg(TV) = 7$.

Trabajo en conjunto con Gabriela Jeronimo (Universidad de Buenos Aires, CONICET, Argentina) y Pablo Solernó (Universidad de Buenos Aires, CONICET, Argentina).