Lógica modal coalgebraica para probabilidades superiores e inferiores.

Andrés Gallardo
Instituto de Matemática (INMABB), Universidad Nacional del Sur (UNS)-CONICET, Bahía Blanca, Argentina
andresgallardo123@gmail.com

Existen varios enfoques para tratar con la incertidumbre. La teoría de probabilidades se utiliza para medir el grado de certeza que un agente posee sobre la ocurrencia de un evento. Una medida de probabilidad es una función μ definida sobre una σ-álgebra $\mathcal{A}$, que asigna a cada evento $U \in \mathcal{A}$ un número real en el intervalo $[0, 1]$. Un problema surge cuando desconocemos la medida de probabilidad exacta pero disponemos de un conjunto $\mathcal{P} = \{\mu_i\}_{i \in I}$ de medidas definidas sobre la misma álgebra. Podemos considerar entonces las medidas de probabilidad superior $\mathcal{P}^*(U) = \sup\{\mu_i(U) | i \in I\}$ e inferior $\mathcal{P}_*(U) = \text{ínf}\{\mu_i(U) | i \in I\}$, que brindan cotas sobre la probabilidad de U.

La lógica modal probabilista se puede utilizar para expresar las probabilidades de eventos y razonar sobre ellas. La teoría de coálgebras, por otro lado, permite modelar en forma unificada aspectos de los marcos de Kripke, marcos probabilísticos, autómatas y sistemas etiquetados de transición probabilísticos, entre otros. En este trabajo buscamos generalizar estos modelos para incluir las medidas de probabilidad superiores e inferiores.

Para una categoría $\mathbf{C}$, y un endofuntor T en $\mathbf{C}$, una T-coálgebra es un par (X, α), donde X es un objeto de $\mathbf{C}$, y α es un morfismo de X en TX. En [1] se define una clase de funtores polinomiales en espacios medibles, y se detalla el lenguaje de la lógica modal coalgebraica para estos funtores trabajando en forma semántica. Esta semántica fue axiomatizada por Goldblatt [2], que además probó la completitud fuerte para ciertos sistemas deductivos Lindenbaum.

Apelamos a resultados de [3] quienes definieron una lógica modal correcta y fuertemente completa para probabilidades superiores e inferiores, usando una caracterización de las medidas de probabilidad superior sobre un álgebra de conjuntos (en vez de una σ-álgebra), que fue demostrada en 1985 por Anger y Lembcke [4].

En este trabajo definimos una clase de funtores polinomiales que incorpora aquellos obtenidos aplicando el operador Δ^*, que a partir de un espacio medible X permite obtener el espacio $\Delta^* X$ de medidas de probabilidades superiores definidas sobre X. Damos un sistema deductivo axiomático para cada funtor T, probamos que su lógica asociada es correcta y damos un resultado de completitud. Luego, extendemos estos sistemas para incluir también el operador Δ que se refiere a las medidas de probabilidad finitamente aditivas.

Trabajo en conjunto con Ignacio Viglizzo.

Referencias

[1] Lawrence S. Moss and Ignacio D. Viglizzo. Harsanyi type spaces and final coalgebras constructed from satisfied theories. In Proceedings of the Workshop on Coalgebraic Methods in Computer Science, volume 106 of Electron. Notes Theor. Comput. Sci., pages 279–295. Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 2004.

[2] Robert Goldblatt. Deduction systems for coalgebras over measurable spaces. J. Logic Comput., 20(5):1069–1100, 2010.

[3] Nenad Savić, Dragan Doder, and Zoran Ognjanović. A logic with upper and lower probability operators. In ISIPTA '15: Proceedings of the Ninth International Symposium on Imprecise Probability: Theories and Applications, pages 267–276, 2015.

[4] Bernd Anger and Jörn Lembcke. Infinitely subadditive capacities as upper envelopes of measures. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 68(3):403–414, 1985.