Extensiones de Hilbert de un espacio de Priestley

Sergio Celani
Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro, CONICET, Argentina
sergiocelani@gmail.com

Es conocido que en cualquier conjunto ordenado $\langle P, \leq \rangle$ con último elemento 1 se puede definir una estructura de álgebra de Hilbert definiendo una implicación $\rightarrow_{\leq}$ por medio de la fórmula

$$a \rightarrow_{\leq} b := \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ b & \text{si } a \nleq b \end{cases}.$$

Esto motiva estudiar álgebras de Hilbert sobre estructuras algebraicas ordenadas de tal forma la implicación de Hilbert sea compatible con el orden inducido por la estructura algebraica. En particular podemos estudiar implicaciones de Hilbert compatibles en semiretículos [1] [3] y en retículos distributivos [5]. Algunas de estas clases de álgebras resultan ser variedades. Particularmente interesante es la variedad de las álgebras de Hilbert distributivas definidas y estudiadas en [5].

En objetivo central de esta comunicación es estudiar, desde un punto de vista topológico, las implicaciones compatibles que se pueden definir en un retículo distributivo acotado. La noción central que introduciremos es la noción de extensión de Hilbert de un espacio de Priestley.

Una *extensión de Hilbert* de un espacio de Priestley $\langle X, \leq_X, \tau \rangle$ es un conjunto ordenado $\langle Y, \leq \rangle$ cumpliendo las siguientes condiciones:

1. $\langle X, \leq_X \rangle$ es un subconjunto ordenado de $\langle Y, \leq \rangle$, es decir $X \subseteq Y$ y $\leq_X = \leq \cap (X \times X)$.

2. Para cada $y, z \in Y$, si $y \nleq z$, entonces existe $x \in X$ such that $x \leq y$ y $x \nleq z$.

3. $\uparrow U \rightarrow_Y \uparrow V = \uparrow ((\uparrow U \rightarrow_Y \uparrow V) \cap X)$, para cualquier $U, V \in \mathrm{D}(X)$, donde $U \rightarrow_Y V = \{y \in Y : \uparrow y \cap U \subseteq V\}$ es la implicación de Heyting definida en el retículo $\mathrm{Up}(Y)$.

4. La familia $\mathcal{K}_Y = \{(\uparrow U)^c : U \in \mathrm{D}(X)\}$ es una base para una topología $\tau_{\mathcal{K}_Y}$ definida en Y tal que $\langle Y, \tau_{\mathcal{K}_Y} \rangle$ es un espacio de Hilbert (ver [1] o [2] para la definición de espacio de Hilbert).

Si $\langle Y, \leq \rangle$ es una extensión de Hilbert de un espacio de Priestley $\langle X, \leq_X, \tau \rangle$, entonces se prueba que

1. El retículo distributivo de los abiertos-cerrados y crecientes $\mathrm{D}(X)$ dotado de una implicación de Hilbert $\Rightarrow$ definida por

$$U \Rightarrow V = (\uparrow U \rightarrow_Y \uparrow V) \cap X$$

para todo $U, V \in \mathrm{D}(X)$, es una implicación compatible y por lo tanto $(\mathrm{D}(X), \cup, \cap, \Rightarrow, \emptyset, X)$ es un álgebra de Hilbert distributiva.

2. El conjunto ordenado de las implicaciones compatibles en un retículo distributivo acotado L es isomorfo al dual del conjunto ordenado de las extensiones de Hilbert del espacio de Priestley de L.

Además, los resultados anteriores permiten desarrollar una dualidad tipo Priestley para las álgebras de Hibert distributivas. Esta dualidad extiende la dualidad de Esakia para las álgebras de Heyting.

Trabajo en conjunto con Leonardo Cabrer.

Referencias

[1] Celani S. A. , Cabrer L. M., and Montangie D., Representation and duality for Hilbert algebras. Central European Journal of Mathematics Vol. 7 Num. 3 (2009) 463-478.

[2] Celani S. A. and Montangie D. Hilbert algebras with supremum. Algebra Universalis, Vol. 67, Number 3 (2012), 237-255.

[3] Celani, S. A., and Esteban, M. Spectral-like duality for distributive Hilbert algebras with infimum. Algebra universalis, 78(2), (2017),193-213.

[4] Figallo, A.V., Ramón, G. Z., Saad, S.: A note on the Hilbert algebras with infimum. 8th Workshop on Logic, Language, Informations and Computation, WoLLIC 2001 (Brasília), Mat. Contemp. 24, 23–37 (2003)

[5] Figallo, Aldo V., Guillermina Ramón, and Susana Saad. A note on the distributive Hilbert algebras. Proceedings of the Fifth Dr. Antonio AR Monteiro, Bahía Blanca. 1999.