Núcleos sobre reticulados residuados

Sebastián Andrés Buss
INMABB, Argentina
sbuss94@gmail.com

Un *reticulado residuado* es una estructura $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, *, \to, 0, 1\rangle$ del tipo $\langle 2, 2, 2, 2, 0, 0\rangle$ tal que $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un reticulado acotado, $\langle A, *, 1\rangle$ es un monoide conmutativo y además se satisface la condición de residuación

$$x * y \leq z \Leftrightarrow x \leq y \to z$$

para todo $x, y, z \in A$. Dado un reticulado residuado $\mathbf{A}$ diremos que un mapeo $f : A \to A$ es un *núcleo* sobre $\mathbf{A}$ si es un operador de clausura que satisface

$$f(x) * f(y) \leq f(x * y)$$

para todo $x, y \in A$. El concepto de núcleo fue originalmente definido en el contexto de álgebras Brouwerianas y de quantales [1,2]. Para reticulados residuados el concepto fue introducido por Galatos y Tsinakis en [3], donde fue utilizado para dar algunas caracterizaciones de $\mathbb{MV}$-álgebras generalizadas. Otro interés por estudiar los núcleos sobre un reticulado residuado surge a partir del hecho de que el conjunto de elementos regulares $Reg_f(\mathbf{A}) := \{a \in A : f(a) = a\}$ admite una estructura natural de reticulado residuado y el conjunto de elementos densos $Ds_f(\mathbf{A}) := \{a \in A : f(a) = 1\}$ define un filtro implicativo sobre $\mathbf{A}$. Para más información sobre reticulados residuados y núcleos recomendamos ver [4,5]. Dada $\mathbb{V}$ una subvariedad de $\mathbb{RL}$ diremos que un término $t(x)$ en el lenguaje de reticulados residuados es un núcleo sobre $\mathbb{V}$ si la interpretación $t^{\mathbf{A}}$ es un núcleo sobre $\mathbf{A}$ para todo $\mathbf{A} \in \mathbb{V}$. Ejemplos clásicos de núcleos sobre subvariedades de $\mathbb{RL}$ son los términos $t(x) = x$, $t(x) = \neg\neg x$ y $t(x) = 1$, a los que llamaremos núcleos triviales. En esta presentación mostraremos, entre otros resultados clásicos, algunos resultados sobre núcleos en las subvariedades $\mathbb{H}$, $\mathbb{G}$, Π, $\mathbb{MV}$ y $\mathbb{BL}$. Mostraremos, por ejemplo, que los únicos núcleos sobre dichas variedades son los triviales. Algunas herramientas que utilizaremos para probar dichos resultados son una caracterización ecuacional de núcleos, descripciones conocidas de álgebras libres uno generadas y descripciones de álgebras canónicas que generan a dichas variedades.

Referencias

[1] J. Schmidt, C. Tsinakis. Relative pseudo-complements, join-extensions and meet-retractions. Mathematische Zeitschrift 157 (271-284), 1977.

[2] K. I. Rosenthal. Quantales and their applications. Pitman Research Notes in Mathematics 234, Longman 1990.

[3] N. Galatos, C. Tsinakis. Generalized MV-algebras. Journal of Algebra 283 (254-291), 2005.

[4] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski, H. Ono. Residuated Lattices: An Algebraic Glimpse at Substructural Logics. Studies in Logics and the Foundations of Mathematics, Elsevier 2007.

[5] S.-W. Han, B. Zhao. Nuclei and conuclei on residuated lattices. Fuzzy Sets and Systems 172 (51-70), 2011.