Identificacion de la fuente en una ecuacion de Poisson con condiciones de Cauchy con tecnicas de problema inverso de momentos

María Beatriz Pintarelli
Dep. de Matemática, Fac. de Ciencias Exactas, UNLP- Dep. Ciencias Basicas, Fac. Ingenieria , UNLP, Argentina
mariabpintarelli@gmail.com

El problema de encontrar $w(x,t)$ y $\Phi(x,t)$ en la ecuacion de Poisson

$$w_{tt} + w_{xx} = \Phi(x,t)$$

sobre un dominio $E = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ o $E = (a_1, b_1) \times (a_2, \infty)$, bajo condiciones de Cauchy es posible resolverlo usando las tecnicas de problema inverso de momentos generalizados.
Se aproxima $w(x,t)$ en dos pasos:
Consideramos la ecuacion $w_{xx} - kw_{tt} = -(k+1)w_{tt} + \Phi(x,t) = G(x,t)$, y la llevamos a la ecuacion integral

$$\iint_E u(-\sqrt{k}w_x + kw_t)dA = \varphi_1(r)$$

Con las tecnicas de problema inverso de momentos se encuentra una solucion aproximada $p_{1n}(x,t)$ para $-\sqrt{k}w_x + kw_t$.
Entonces consideramos la ecuacion $-\sqrt{k}w_x(x,t) + kw_t(x,t) = p_{1n}(x,t)$ y la llevamos a la ecuacion integral

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} K(m,r,x,t)w(x,t)dtdx = \varphi_2(m,r)$$

con

$$\varphi_2(m,r) = \int_{a_1}^{b_1} u(m,r,x,b_2)kw(x,b_2) - u(m,r,x,a_2)kw(x,a_2)dx -$$

$$-\int_{a_2}^{b_2} u(m,r,b_1,t)\sqrt{k}w(b_1,t) - u(m,r,a_1,t)\sqrt{k}w(a_1,t)dt - \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} p_{1n}(x,t)udxdt$$

La resolvemos y hallamos una aproximacion $p_{2n}(x,t)$ para $w(x,t)$.
Finalmente consideramos $w_{xx}(x,t) + w_{tt}(x,t) = \Phi(x,t)$ la llevamos a la ecuacion integral

$$\therefore \iint u\Phi(x,t)dA = G(m,r) -$$

$$-\int_{a_2}^{b_2} \left(w(b_1,t)u_x(m,r,b_1,t) - w(a_1,t)u_x(m,r,a_1,t)\right) dt -$$

$$-\int_{a_1}^{b_1} \left(w(x,b_2)u_t(m,r,x,b_2) - w(x,a_2)u_t(m,r,x,a_2)\right) dx +$$

$$+\iint_E wu \left(-\left(\frac{m}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{r}{b_2}\right)^2\right) dA = \varphi_3(m,r)$$

Reemplazamos $w(x,t)$ por $p_{2n}(x,t)$ en $\varphi_3(m,r)$. y se halla una solucion aproximada $p_{3n}(x,t)$ para $\Phi(x,t)$.
Se encuentra una cota para el error de la solucion estimada y se ilustra el metodo con ejemplos.