# Métricas difusivas inducidas por afinidades aleatorias en grafos. Una aplicación al transporte público en AMBA en el contexto Covid-19.

**María Florencia Acosta**
Instituto de Matemática Aplicada del litoral, UNL, CONICET, Argentina
ma.flor.acosta@gmail.com

Sea $G(V)$ la clase de los grafos $G = \left(V, E, \bar{a}, \overline{\overline{A}}\right)$, simples, no dirigidos y pesados sobre un conjunto de vértices $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, con aristas $E = \{\{i, j\} : i, j \in V\}$, vector de pesos de los vértices $\bar{a} = (a_i : i \in V)$, con $a_i > 0$, y matriz de pesos de las aristas $\overline{\overline{A}} = (A_{ij} : i, j \in V)$, con $A_{ij} \geq 0$. El operador Laplaciano sobre $G$ aplicado a una función $f : V \to \mathbb{R}$ se define por $\Delta_G f(i) = \frac{1}{a_i} \sum_{j \in V} A_{ij}(f(j) - f(i))$. Sea $\left(\Omega, P\right)$ un espacio de probabilidad. Un *grafo aleatorio sobre* $V$, es decir, $G(w) = \left(V, E, \bar{a}(w), \overline{\overline{A}}(w)\right) \in G(V)$ para cada $w \in \Omega$, es una función $G$ definida en $\Omega$ con valores en $G(V)$. Luego, es posible definir el grafo esperado $\mathbb{E}G = \left(V, E, \mathbb{E}\bar{a}, \mathbb{E}\overline{\overline{A}}\right)$. Como antes, se define el operador Laplaciano del grafo aleatorio $G$ por

$$\Delta_{G(w)} f(i) = \frac{1}{a_i(w)} \sum_{j \in V} A_{ij}(w)(f(j) - f(i)), \ w \in \Omega, \ i \in V.$$

Bajo el supuesto de independencia de las variables aleatorias $a_i$ y $A_{ij}$, resulta sencillo calcular la esperanza del operador aleatorio $\Delta_{G(w)}$ y como consecuencia la correspondiente métrica de Coifman y Lafon ([1]) que para $t > 0$ esta dada por

$$d_t(i, j) = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} e^{2t\lambda_k} |\phi_k(i) - \phi_k(j)|^2}.$$

En particular, la aplicación se realiza para el caso de la metrización de AMBA. Utilizamos combinaciones convexas de afinidades de dos matrices tomadas entre: una matriz que refleja los datos provistos por SUBE, una matriz que exhibe la cercanía entre ciudades de AMBA, una matriz que tiene en cuenta la longitud de la frontera entre ciudades y una matriz que tiene en cuenta la longitud de la frontera compartida con el mínimo de la población de dos ciudades vecinas ([2] y [3]).

A partir de esto se genera una diversidad de métricas en $V = \{1, 2, \ldots, 41\}$ puesto que cualquier combinación convexa de matrices $A$ proporciona un Laplaciano y su familia correspondiente de métricas en $V$.

Se comparan los resultados obtenidos por estas métricas con los mapas proporcionados por los casos positivos de COVID-19 en cada ciudad de AMBA, durante la segunda ola (junio-agosto 2020) y durante la ola correspondiente a la variable Omicron (diciembre 2021-febrero 2022).

*Trabajo en conjunto con Hugo Aimar (Instituto de Matemática Aplicada del litoral, UNL, CONICET, Argentina), Ivana Gómez (Instituto de Matemática Aplicada del litoral, UNL, CONICET, Argentina) y Federico Morana (Instituto de Matemática Aplicada del litoral, UNL, CONICET, Argentina).*

## Referencias

[1] Ronald R. Coifman and Stephane Lafon, Diffusion maps, Appl. Comput. Harmon. Anal. 21 (2006), 5–30.

[2] María Florencia Acosta, Hugo Aimar, Ivana Gómez and Federico Morana, Diffusive metrics induced by multiaffinities. The COVID-19 setting for Buenos Aires (AMBA), Proceedings of VIII MACI (2021), vol. 8, 731–734.

[3] María Florencia Acosta, Hugo Aimar, Ivana Gómez and Federico Morana, Diffusive metrics induced by random affinities on graphs. An application to the transport systems related to the COVID-19 setting for Buenos Aires (AMBA), Trends in Computational and Applied Mathematics, en prensa.