# Estudio de existencia y unicidad de solución de un problema de tipo Lotka-Volterra fraccionario con efecto Allee y cosecha

**Melani Barrios**
Universidad Nacional de Rosario, Facultad de Ciencias Exactas Ingeniería y Agrimensura, Argentina
melani@fceia.unr.edu.ar

Un modelo matemático clásico depredador-presa de Lotka-Volterra es un sistema formado por ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales que modelizan el crecimiento de dos poblaciones biológicas que ocupan el mismo ambiente. Una especie, los depredadores, se alimentan de la otra especie, las presas, que a su vez se nutren de un tercer alimento ampliamente disponible en ese ambiente, [3].

Motivado por aplicaciones en diversas áreas científicas (electricidad, magnetismo, mecánica, dinámica de fluidos, medicina, etc.), el cálculo fraccionario se encuentra en rápido desarrollo, lo que ha llevado a un gran crecimiento de su estudio en las últimas décadas. La derivada fraccionaria es un operador no local, esto convierte a las ecuaciones diferenciales fraccionarias en buenas candidatas para la modelización de situaciones en las que es importante considerar la historia del fenómeno estudiado [1, 4, 6], a diferencia de los modelos con derivada clásica donde esto no se tiene en cuenta.

Un problema de tipo depredador-presa fraccionario con efecto Allee y cosecha es de la forma

$$\begin{cases} D^{\alpha}\left[x\right](t) = rx(t)\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)(x(t)-m) - bx(t)y(t) \\ D^{\alpha}\left[y\right](t) = cx(t)y(t) - dy(t) - ey(t) \end{cases}$$

donde $D^{\alpha}$ es la derivada fraccionaria de Caputo de orden $0 < \alpha \leq 1$, $x(t)$ representa la cantidad de presas, $y(t)$ representa la cantidad de depredadores en el tiempo $t$ y los diferentes parámetros $r, K, m, b, c, d, e$ se suponen todos positivos.

En la ecuación que modela las presas podemos ver que el primer sumando corresponde al crecimiento de las mismas, donde es considerado un efecto llamado Allee en el que intervienen los siguientes parámetros: $r$ tasa de crecimiento intrínseco, $K$ capacidad de carga y $m$ representa el umbral del efecto Allee, es decir la densidad de población mínima para el crecimiento de las presas que por debajo de la cual la población se extingue (dicho valor proviene de procesos cooperativos que tienen una influencia de retroalimentación positiva ya que provee a los individuos una mayor oportunidad de sobrevivir y reproducirse a medida que aumenta su densidad de población), y el segundo sumando representa la disminución de las presas por ser capturadas, [2, 5]. En la ecuación que modela los depredadores podemos ver que el primer sumando corresponde al crecimiento de los mismos por capturar presas, el segundo sumando representa la mortalidad natural de los depredadores mientras que el tercer sumando representa la cosecha de los mismos, que puede deberse a su captura por humanos.

En este trabajo se realiza un análisis sobre la existencia y unicidad de soluciones, mostrando la no negatividad de las mismas. Para aproximar las soluciones se utiliza el método numérico fraccionario de Adams-Bashforth, [7]. Por último, se hacen comparaciones con el problema clásico, donde sólo interviene la derivada de primer orden.

*Trabajo en conjunto con Daiana Bravo (Universidad Nacional de Rosario, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Argentina) y Gabriela Reyero (Universidad Nacional de Rosario, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Argentina).*

## Referencias

[1] Barrios M., Reyero G. An Euler-Lagrange equation only depending on derivatives of Caputo for fractional variational problems with classical derivatives. Statistics, Optimization Information Computing 8, 2 (2020), 590–601, DOI: 10.19139/soic–2310–5070–865.

[2] Barrios, M., Reyero, G., Tidball, M. Harvest management problem with a fractional logistic equation. Mathematica Pannonica New Series 27 /NS 1/, no. 1 (2021), 21–34.

[3] Clark C.,W. The optimal management of renewable resources, vol. 2. Mathematical Bioeconomics, 1990.

[4] Diethelm, K. The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type. Springer Science  Business Media, 2010.

[5] Diethelm, K., Ford, N. J., Freed, A. D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. Nonlinear Dynamics 29, 1 (2002), 3–22.

[6] Ferrari, A., Santillan Marcus, E. Study of a fractional-order model for HIV infection of CD4+ T-cells with treatment. Journal of Fractional Calculus and Applications 11, 2 (2020), 12–22.

[7] Li, C., Zeng, F. Numerical methods for fractional calculus, vol. 24. CRC Press, 2015.