Análisis del error L^2 para coarsening local en Espacios de Splines

Silvano Carlos Figueroa
Universidad Nacional del Litoral, Facultad de Ingeniería Química, Argentina
nano95figueroa@gmail.com

Sean n y p enteros positivos. Denotamos con $S_{p,\Xi}$ al espacio de dimensión n de funciones splines de grado p definido sobre un vector de nodos $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n+p+1}\}$. Dada $f \in S_{p,\Xi}$, la misma se puede expresar a partir de n coeficientes $\mathbf{c} = (c_i)_{i=1}^n$ mediante

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i B_{i,p,\Xi}$$

donde $B_{i,p,\Xi}$ denota la i-ésima B-spline de grado p asociada a Ξ. Ahora, dado i_0 tal que $\xi_{i_0-1} \leq \xi_{i_0} < \xi_{i_0+1}$, definimos $\bar{\Xi} = \Xi \setminus \{\xi_{i_0}\}$ y denotamos con $S_{p,\bar{\Xi}}$ al espacio de funciones spline de grado p sobre $\bar{\Xi}$ y de dimensión $n-1$.

Problema 1: Queremos hallar un spline $g \in S_{p,\bar{\Xi}}$ tal que

$$g = \arg \min_{h \in S_{p,\bar{\Xi}}} \|f - h\|_{L^2}$$

Para ello planteamos el siguiente Problema 2 equivalente a 1: Dado un spline $f \in S_{p,\Xi}$ se desea calcular un vector $\hat{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^{n-1}$ tal que

$$\hat{\mathbf{c}} = \arg \min_{z \in \mathbb{R}^{n-1}} \|E^{\frac{1}{2}}(Az - \mathbf{c})\|_2$$

donde A es la matriz de inserción de nodos global de $S_{p,\bar{\Xi}}$ en $S_{p,\Xi}$ y E es una matriz diagonal.

Una vez probada la equivalencia entre el Problema 1 y Problema 2, nos centraremos en encontrar la solución $\hat{\mathbf{c}}$ del Problema 2.

En la búsqueda del vector $\hat{\mathbf{c}}$ se prueba que este tiene ciertas propiedades, por un lado es solución de un sistema lineal de la forma $B^T B\hat{\mathbf{c}} = B^T \mathbf{c}$ y que el residuo del sistema global de orden n se puede reducir al de un sistema lineal local más pequeño de orden $p+2$.

Por último veremos que el residuo de este sistema pequeño se puede calcular como una combinación de ciertas componentes del vector $\mathbf{c}$, la cual proviene de una descomposición QR de la matriz B.

Trabajo en conjunto con Eduardo M. Garau (Universidad Nacional del Litoral, Argentina).