HHO y Exponential Fitting para problemas de convección-difusión singularmente perturbados

Cecilia Penessi
Universidad Nacional de Rosario, Facultad de Ciencias Exactas Ingeniería y Agrimensura - CONICET, Argentina
cepenessi@gmail.com

Consideramos problemas de convección-difusión estacionarios con convección dominante de la forma

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(\varepsilon\nabla u - \overline{\beta}u) & = & f & \text{en } \Omega, \\ u & = & g & \text{en } \Gamma, \end{array} \right.$$

donde Ω es un dominio poligonal y $\Gamma = \partial\Omega$. Además, $\overline{\beta}$ es un campo vectorial, f y g funciones dadas y $0 < \varepsilon \ll 1$ (caso singularmente perturbado).

Los términos convectivos en este tipo de problemas tienen influencia significante en las soluciones tanto teóricas como numéricas, y no pueden considerarse simplemente términos de menor orden. Las soluciones de los problemas de convección-difusión son de naturaleza convectiva en la mayor parte del dominio y la parte difusiva del operador diferencial tiene influencia solo en ciertos subdominios estrechos. Allí, el gradiente de la solución es grande: su magnitud es proporcional a alguna potencia negativa de ε.

El hecho de que el comportamiento elíptico sea solo en una parte menor del dominio causa que los métodos numéricos para problemas elípticos no funcionen adecuadamente, exhibiendo un cierto grado de inestabilidad en la práctica. Más aún, el diseño de métodos adecuados para la interacción entre convección y difusión plantea una tarea desafiante en análisis numérico de EDPs.

En esta charla presentamos un desarrollo preliminar que consiste en aplicar una técnica de estabilización conocida como exponential fitting (EF) [1] al método High Hybrid Method (HHO) recientemente introducido en la literatura [2]. Más específicamente, en el caso $\overline{\beta} = \nabla\psi$, el problema (1) puede simetrizarse escribiéndose como $\mathrm{div}(a(x)\nabla\rho) = f$ con apropiadas condiciones de borde para la nueva variable ρ. Se discretiza este nuevo problema con el método HHO y luego, a nivel discreto, se vuelve a la variable u_h (aproximación de u) mediante una adecuada transformación inversa discreta (EF).

El método HHO utiliza espacios discretos que consisten de polinomiales a trozos sobre los elementos e, independientemente, sobre las aristas de las mallas. Una de las características que lo definen es la posibilidad de utilizar mallas poligonales arbitrarias que puede ser determinante a la hora de trabajar con geometrías complejas o cuando se necesita adaptatividad. La combinación de EF con un método de Galerkin discontinuo ya había sido estudiada en [3]. El método HHO de grado más bajo brinda una manera, en principio más natural, de definir la transformación inversa discreta $\rho_h \to u_h$ que caracteriza a esta técnica.

Trabajo en conjunto con Ariel Lombardi (Universidad Nacional de Rosario, Facultad de Ciencias Exactas Ingeniería y Agrimensura - CONICET, Argentina) y Melani Barrios (Universidad Nacional de Rosario, Facultad de Ciencias Exactas Ingeniería y Agrimensura, Argentina).

Referencias

[1] Brezzi, F., Marini, L. D., and Pietra, P. Two-dimensional exponential fitting and applications to drift-diffusion models. SIAM Journal on Numerical Analysis 26, 6 (1989), 1342–1355

[2] Di Pietro, D. A., and Droniou, J. The hybrid high-order method for polytopal meshes. Design, analysis, and applications 19 (2019).

[3] Lombardi, A. L., and Pietra, P. Exponentially fitted discontinuous galerkin schemes for singularly perturbed problems. Numerical Methods for Partial Differential Equations 28, 6 (2012), 1747–1777.