Resolución numérica del problema de Stokes-Darcy mediante elementos finitos de Taylor-Hood

María Gabriela Armentano
Depto. de Matemática, FCEyN, UBA - IMAS, CONICET, Argentina
garmenta@dm.uba.ar

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto con borde poligonal dividido en dos subdominios Ω_S y Ω_D, donde los subindices S y D simbolizan el medio fluido y el poroso respectivamente. Asumimos que $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_S \cup \overline{\Omega}_D$, $\Omega_S \cap \Omega_D = \emptyset$ y notamos $\Gamma_I = \overline{\Omega}_S \cap \overline{\Omega}_D$ la interfase entre el fluido y el medio poroso, $\Gamma_S = \partial\Omega_S \setminus \Gamma_I$ y $\Gamma_D = \partial\Omega_D \setminus \Gamma_I$.

El problema de Stokes-Darcy acoplado describe el movimiento de un fluido viscoso incompresible que ocupa la región Ω_S y que fluye a través de la interfase al medio poroso situado en Ω_D. El modelo matemático de este problema puede ser definido por dos grupos separados de ecuaciones correspondientes a Ω_S y Ω_D y un conjunto de ecuaciones referentes al acople. Para cualquier función $\mathbf{v}$ definida en Ω notamos $\mathbf{v}_S = \mathbf{v}|_{\Omega_S}$ y $\mathbf{v}_D = \mathbf{v}|_{\Omega_D}$.

En Ω_S, el movimiento del fluido está gobernado por la ecuación de Stokes:

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u}_S + \nabla p_S = \mathbf{f}_S, & \text{en } \Omega_S, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_S = 0, & \text{en } \Omega_S, \\ \mathbf{u}_S = 0, & \text{en } \Gamma_S, \end{cases}$$

donde $\mathbf{u}_S$ representa la velocidad del fluido, p_S la presión, $\mathbf{f}_S \in (L^2(\Omega_S))^2$ la fuerza por unidad de masa y $\mu > 0$ la viscosidad.

Notamos por $\mathbf{n}_j$ la normal exterior en $\partial\Omega_j$, $j = S, D$. En la interfase Γ_I, tenemos $\mathbf{n}_S = -\mathbf{n}_D$. En Ω_D, el movimiento del fluido en el medio poroso es gobernado por la ley de Darcy:

$$\begin{cases} \dfrac{\mu}{K}\mathbf{u}_D + \nabla p_D = \mathbf{f}_D, & \text{en } \Omega_D, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_D = g_D, & \text{en } \Omega_D, \\ \mathbf{u}_D \cdot \boldsymbol{n_D} = 0, & \text{en } \Gamma_D, \end{cases}$$

con $\mathbf{u}_D$ la velocidad, p_D la presión, $\mathbf{f}_D \in (L^2(\Omega_D))^2$, $g_D \in L^2(\Omega_D)$ y K el tensor de permeabilidad aquí reducido a un escalar positivo pues consideramos el caso isotrópico.

En la interfase asuminos las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_D + \mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n}_S = 0, \\ p_S\, \mathbf{n}_S - \mu\nabla\mathbf{u}_S\, \mathbf{n}_S - p_D\, \mathbf{n}_S - \mu\dfrac{\alpha}{\sqrt{K}}(\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{t})\, \mathbf{t} = 0, \end{cases}$$

La primera ecuación representa la conservación de masa y la segunda es la condición de Beavers-Joseph-Saffman, α es un parámetro determinado por evidencia experimental y $\mathbf{t}$ es el vector tangente en Γ_I.

En este trabajo analizamos la resolución por elementos finitos del problema acoplado de Stokes-Darcy mediante el método de Taylor-Hood de orden más bajo, el cual emplea funciones continuas cuadráticas a trozos para la velocidad y funciones continuas lineales a trozos para la presión.

Los métodos de Taylor-Hood son unos de los métodos más usados para resolver el problema de Stokes, ya que para Stokes resultan ser estables y de simple aplicación, sin embargo pueden no ser apropiados para resolver el problema de Darcy y en consecuencia no ser adecuados para el problema de Stokes-Darcy acoplado. Presentamos entonces una reformulación del problema acoplado que nos permite utilizar el método de Taylor-Hood en el problema de Stokes-Darcy bajo consideración. La estabilidad del método se demuestra construyendo un operador de Fortin apropiado. El método propuesto resulta ser de orden óptimo y de muy simple implementación. Concluimos mostrando varios ejemplos numéricos que muestran la buena performance del método propuesto.

Trabajo en conjunto con María Lorena Stockdale (Depto. de Matemática, FCEyN, UBA, Argentina).