

NORMAS EQUIVALENTES EN ESPACIOS DE SOBOLEV EN DOMINIOS

Ricardo Durán

Universidad de Buenos Aires y CONICET, Argentina

rduran@dm.uba.ar

Dado un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ consideramos, para $k \geq 2$ y $1 \leq p \leq \infty$, el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ de funciones tales que ella junto con todas sus derivadas de orden menor o igual que k pertenecen a $L^p(\Omega)$. Es un resultado conocido que bajo ciertas hipótesis sobre Ω , por ejemplo que sea un dominio Lipschitz, se obtiene una norma equivalente a la usual quedándonos sólo con las normas en $L^p(\Omega)$ de la función y sus derivadas de mayor orden. Es decir, existe una constante C que depende sólo de Ω y de k tal que $\forall u \in W^{k,p}(\Omega)$,

$$(1) \quad \|D^\beta u\|_p \leq C \left\{ \|u\|_p + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_p \right\} \quad \forall |\beta| \leq k$$

En esta charla mostramos que este resultado vale en una clase muy general de dominios: aquellos para los cuales vale la desigualdad de Poincaré.

Un resultado más difícil de demostrar, y que requiere hipótesis más fuertes sobre el dominio, es que nos podemos quedar sólo con derivadas puras. Por ejemplo, para $k = 2$ y $n = 2$,

$$(2) \quad \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right\|_p \leq C \left\{ \|u\|_p + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_p + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\|_p \right\}$$

Mostramos que, para $1 < p < \infty$, (2) vale para los dominios de John, una clase muy general que incluye a los Lipschitz. Mostramos un ejemplo simple de dominio en el cual el resultado es falso aunque sí vale (1).

Mostramos también que vale la extensión de (2) al caso general $n \geq 2$ y $k \geq 2$ cuando el dominio es Lipschitz.

También mostramos que todos estos resultados son válidos para espacios de Sobolev con pesos en la clase A_p .

Trabajo en conjunto con Irene Drelichman (Universidad Nacional de La Plata y CONICET, Argentina).