

ANÁLISIS DE CONVERGENCIA DEL MÉTODO DEL SUBESPACIO ITERATIVO

Pedro Massey

FCE-UNLP y IAM-CONICET, Argentina

pedromassey@gmail.com

Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ se busca hallar una matriz \hat{A} tal que $\text{rank}(\hat{A}) \leq h$ ($1 \leq h \ll \min\{m, n\}$) y que el error en la aproximación $\|A - \hat{A}\|$ sea lo más chico posible. Si $A = U\Sigma V^*$ es una descomposición en valores singulares (DVS) sea Σ_h la matriz que se obtiene de Σ modificando las entradas diagonales $(\Sigma_h)_{jj} = 0$, $h + 1 \leq j \leq \min\{m, n\}$. Entonces $A_h = U\Sigma_h V^*$ es una matriz tal que $\text{rank}(A_h) \leq h$ y tal que $\|A - A_h\| \leq \|A - B\|$, para toda matriz B tal que $\text{rank}(B) \leq h$. Si bien A_h es una solución óptima al problema planteado, la complejidad del cálculo de una DVS - cuando $\min\{m, n\}$ es muy grande - induce a considerar otras soluciones computacionalmente menos complejas.

Un método popular para el cálculo de aproximaciones de A por matrices de rango bajo es el llamado método del subespacio iterativo (MSI): comenzando con una matriz $X \in \mathbb{C}^{n \times t}$ (para $h \leq t \ll \min\{m, n\}$) que satisface ciertas propiedades de compatibilidad con A , se calculan iterativamente las matrices $A^q X$, $q \geq 1$. Si las columnas de $Q \in \mathbb{C}^{n \times s}$ forman una base ortonormal del rango de $A^q X$ entonces el MSI calcula la aproximación óptima $(Q^* A^q X)_h$ de $Q^* A^q X \in \mathbb{C}^{s \times t}$ y propone como aproximación de A a la matriz $Q(Q^* A^q X)_h$.

Los análisis de convergencia del MSI (en función de $q \geq 0$) en el contexto determinístico se obtienen típicamente bajo la hipótesis $\sigma_h > \sigma_{h+1}$, donde $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$ denotan los valores singulares de A y $p = \min\{m, n\}$. En esta charla describimos un enfoque diferente para el análisis de convergencia en el contexto determinístico, en donde no se requiere el salto $\sigma_h > \sigma_{h+1}$ en el índice h , sino que se aprovechan saltos existentes de los valores singulares de A en índices próximos a h .