El mejor L^p-aproximante extendido es casi-mejor L^q-aproximante para $p-1 \leq q < p$.

Federico Kovac
Universidad Nacional de La Pampa, Facultad de Ingeniería, Argentina
kovacf@ing.unlpam.edu.ar

Sean Ω un conjunto medible y acotado de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^{p-1}(\Omega)$. Es bien conocido que existe al menos un polinomio $E_p(f) \in \Pi^m$, llamado un mejor L^p-aproximante extendido a f desde Π^m, tal que

$$\left| \int_\Omega |f - E_p(f)|^{p-1} \mathrm{sgn}(f - E_p(f)) Q \right| \leq \delta_{p,1} \int_{\{f = E_p(f)\}} |Q| \quad \text{para todo} \quad Q \in \Pi^m,$$

donde $\delta_{p,1}$ es la función delta de Kronecker. En particular, si $f \in L^p(\Omega)$, $E_p(f)$ coincide con el mejor L^p-aproximante a f desde Π^m. En un breve artículo publicado en Proc. Amer. Math. Soc, Brown y Lucier [1] demostraron que cualquier L^1-aproximante extendido a f desde Π^m es casi-mejor L^q-aproximante a f desde Π^m para $0 < q < 1$, es decir, existe $\rho > 0$ tal que

$$\|f - E_1(f)\|_{L^q(\Omega)} \leq (1+\rho) \inf_{Q \in \Pi^m} \|f - Q\|_{L^q(\Omega)}.$$

Es natural preguntarse si este resultado tiene una contraparte en los espacios $L^p(\Omega)$ para $p > 1$. En este trabajo mostramos que esta pregunta tiene una respuesta afirmativa. Por otro lado, la demostración de Brown y Lucier implica argumentos complejos y poco intuitivos. También proveemos un resultado alternativo para el caso $p = 1$, con una prueba más simple y directa.

Trabajo en conjunto con Favian Levis (UNRC, CONICET, FCEFQyN).

Referencias

[1] L.G. Brown, B.J. Lucier, Best Approximations in L^1 are Near Best in L^p, $p < 1$. Proc. Amer. Math. Soc. 20(1) (1994) 97-100.