Certificados de no negatividad para polinomios positivos en conjuntos contenidos en cilindros

Gabriela Jeronimo
Universidad de Buenos Aires y CONICET, Argentina
jeronimo@dm.uba.ar

El análisis de la no negatividad de polinomios reales sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ es un problema clásico, cuyos orígenes se remontan al Problema 17 de Hilbert que plantea que todo polinomio no negativo en $\mathbb{R}^n$ es suma de cuadrados de funciones racionales. Más generalmente, un certificado de no negatividad para un polinomio f sobre un conjunto semi-algebraico S es una identidad algebraica que pone en evidencia que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in S$. Estos certificados han sido aplicados, por ejemplo, en el desarrollo de algoritmos de optimización polinomial.

Si $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_s(x) \geq 0\}$ con $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{R}[\mathbf{x}] = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, todo polinomio en $M(g_1, \dots, g_s) := \{\sigma_0 + \sum_{1 \leq i \leq s} \sigma_i g_i \mid \sigma_i$ es suma de cuadrados en $\mathbb{R}[\mathbf{x}]\}$ es no negativo en S. El Positivstellensatz de Putinar (ver [3]) establece que, si $R - \|\mathbf{x}\|^2 \in M(g_1, \dots, g_s)$ para algún $R \in \mathbb{R}_{>0}$ (donde $\|\mathbf{x}\|^2 := \sum_{1 \leq j \leq n} x_j^2$), todo $f \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ positivo en S pertenece a $M(g_1, \dots, g_s)$ y, en [2], se dieron cotas para los grados de los polinomios en una representación de f como elemento de $M(g_1, \dots, g_s)$.

La hipótesis $R - \|\mathbf{x}\|^2 \in M(g_1, \dots, g_s)$ en el Positivstellensatz de Putinar implica que S es compacto. Una generalización para conjuntos no compactos fue dada en [4, Theorem 4.2]: bajo ciertas hipótesis sobre $f, g_1, \dots, g_s$, se muestra que existe $B \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $(1 + \|\mathbf{x}\|^2)^B f \in M(g_1, \dots, g_s)$. Por otra parte, en [1] se extendió el Positivstellensatz de Putinar a cilindros del tipo $S \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$: bajo las mismas hipótesis sobre los polinomios $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ que definen a $S \subset \mathbb{R}^n$, se prueba que si $f \in \mathbb{R}[\mathbf{x}, y]$ es positivo en $S \times \mathbb{R}$ y satisface una condición técnica adicional, entonces $f \in M_{\mathbb{R}[\mathbf{x},y]}(g_1, \dots, g_s) := \{\sigma_0(\mathbf{x}, y) + \sum_{1 \leq i \leq s} \sigma_i(\mathbf{x}, y) g_i(\mathbf{x}) \mid \sigma_i(\mathbf{x}, y)$ suma de cuadrados en $\mathbb{R}[\mathbf{x}, y]\}$, y se dan cotas para los grados de una representación.

En esta comunicación presentamos un nuevo certificado de no negatividad para polinomios positivos sobre conjuntos no compactos contenidos en cilindros. Si $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid g_1(x, y) \geq 0, \dots, g_s(x, y) \geq 0\}$ tal que $R - \|\mathbf{x}\|^2 \in M_{\mathbb{R}[\mathbf{x},y]}(g_1, \dots, g_s)$ para algún $R \in \mathbb{R}_{>0}$ y $f \in \mathbb{R}[\mathbf{x}, y]$ es positivo en S, bajo ciertas hipótesis sobre $f, g_1, \dots, g_s$, mostramos que existen $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y polinomios $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s$ que son sumas de cuadrados en $\mathbb{R}[\mathbf{x}, y]$ tales que

$$(1 + y^2)^N f = \sigma_0 + \sigma_1 g_1 + \cdots + \sigma_s g_s,$$

con cotas para N y los grados de $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s$.

Trabajo en conjunto con Daniel Perrucci (Universidad de Buenos Aires y CONICET, Argentina)..

Referencias

[1] P. Escorcielo, D. Perrucci. A version of Putinar's Positivstellensatz for cylinders, J. Pure Appl. Algebra, Volume 224, Issue 12, 2020, 106448.

[2] J. Nie, M. Schweighofer. On the complexity of Putinar's Positivstellensatz. J. Complexity 23 (2007), no. 1, 135–150.

[3] M. Putinar. Positive polynomials on compact semi-algebraic sets. Indiana University Mathematics Journal, 42(3): 969–984, 1993.

[4] M. Putinar, F.-H. Vasilescu. Solving moment problems by dimensional extension. Ann. Math. 149 (1999), 1087-1107.