El número de Pitágoras para polinomios de grado 4 en 5 variables

Santiago Laplagne
Universidad de Buenos Aires, Argentina
slaplagn@dm.uba.ar

La descomposición de polinomios reales multivariados como suma de cuadrados de polinomios es un problema central en geometría algebraica real, con aplicaciones teóricas y prácticas en diversas áreas de la matemática. Dado un polinomio f que puede descomponerse como suma de cuadrados, llamamos longitud de f a la cantidad mínima de cuadrados necesarios en cualquier descomposición de f. Una pregunta interesante y difícil es determinar el menor número $p(n, 2d)$ tal que cualquier polinomio homogéneo de grado $2d$ en n variables tiene longitud al menos $p(n, 2d)$. Este número se conoce cómo número de Pitágoras (de polinomios de grado $2d$ en n variables).

En [1], C. Scheiderer propone una forma de construir ejemplos de sumas de cuadrados. Suponiendo que una conjetura de A. Iarrobino y V. Kanev es cierta, el autor demuestra que la descomposición de estos polinomios como suma de cuadrados es única (salvo transformaciones ortogonales), lo que permite determinar fehacientemente la longitud de dichos polinomios. Estos ejemplos dan cotas inferiores para el número de Pitágoras para todos los pares $(n, 2d)$ ($n \geq 3$ y $d \geq 2$) y son las mejores cotas conocidas hasta el momento.

Las cotas inferiores obtenidas para el número de Pitágoras en el trabajo de C. Scheiderer son cercanas a las cotas superiores conocidas. Una pregunta natural es si esas cotas inferiores son óptimas, es decir, si cualquier polinomio puede descomponerse utilizando esa cantidad de cuadrados. Para el caso de polinomios de grado 4 en 5 variables, la cota establecida por C. Scheiderer es 7. Es decir, existe un polinomio que puede descomponerse como suma de 7 cuadrados pero no puede descomponerse como suma de 6 cuadrados (para este caso particular podemos probar la cota sin depender de la conjetura de Iarrobino y Kanev). En este trabajo (en progreso) damos un ejemplo de un polinomio de grado 4 en 5 variables que es suma de cuadrados de 8 polinomios y no puede descomponerse como suma de cuadrados de 7 polinomios. Este ejemplo mejora la cota inferior obtenida por C. Scheiderer, probando que el número de Pitágoras $p(5, 4)$ es mayor o igual que 8. Hasta donde conocemos, este es el primer y único ejemplo en el que se obtiene una cota inferior mejor a la cota dada en [1] para cualquier n y d, demostrando que dichas cotas no son siempre óptimas.

Referencias

[1] Claus Scheiderer, Sum of squares length of real forms, Mathematische Zeitschrift 286 (2017), no. 1-2, 559–570.