El problema de la integración de las conexiones playas en fibrados principales

Javier Fernández
Instituto Balseiro, U.N. de Cuyo - C.N.E.A., Argentina
jfernand@ib.edu.ar

Sea $\phi : Q \to M$ un G-fibrado principal suave. Una conexión en ϕ queda determinada por una 1-forma $\mathcal{A}$ sobre Q con valores en $\mathfrak{g} := Lie(G)$ que satisface una relación de G-equivariancia (ver [3]). Una de las (tantas) aplicaciones de estas conexiones ha sido al estudio de la dinámica de ciertos sistemas dinámicos en Q con tiempo continuo y grupo de simetría G. Una versión análoga de estos sistemas dinámicos, pero con tiempo discreto, ha llevado a introducir la noción de conexión discreta en ϕ. Una tal conexión puede ser descripta mediante una función suave $\mathcal{A}_d$ definida en un entorno abierto de la diagonal Δ_Q de $Q \times Q$ y con valores en G que satisface ciertas propiedades que son análogas discretas a las que cumplen las conexiones suaves (ver [2]). Hay nociones de curvatura tanto para conexiones como para conexiones discretas (ver [3] para las primeras y [2] para las segundas); se dice que una conexión continua o discreta es playa cuando su correspondiente curvatura es trivial.

Si $\mathcal{A}_d$ es una conexión discreta en ϕ, es bien sabido que, identificando Δ_Q con Q, la función $\bar{\mathcal{A}}_d := (D_2\mathcal{A}_d)|_{\Delta_Q} : TQ \to \mathfrak{g}$ define una conexión sobre ϕ; en este sentido se dice que $\mathcal{A}_d$ es una integral de $\bar{\mathcal{A}}_d$. El problema de la integración de una conexión $\mathcal{A}$ en ϕ consiste en hallar todas las conexiones discretas $\mathcal{A}_d$ en ϕ que satisfagan $\bar{\mathcal{A}}_d = \mathcal{A}$. En esta comunicación discutiremos este problema para el caso en que $\mathcal{A}$ es una conexión playa y veremos que siempre existe una única conexión discreta playa que la integra.

La demostración pasará por usar una descripción equivalente de ambos tipos de conexiones en términos de morfismos en las categorías de algebroides de Lie y de grupoides locales de Lie (ver [2]). Observando que el "funtor de derivación" o "funtor de Lie" aplica las conexiones discretas (playas, sobre ϕ) en conexiones (playas, sobre ϕ), un resultado de existencia y unicidad de morfismos entre grupoides locales de Lie que se originan en algebroides de Lie (ver [1]) permite obtener el resultado deseado.

Es posible reobtener la parte de existencia del resultado anterior usando una construcción explícita que, tal vez, permita extender la existencia de integrales de una conexión dada al caso no necesariamente playo. Si el tiempo lo permite, también indicaremos esta alternativa.

Trabajo en conjunto con Francisco Kordon (franciscokordon@gmail.com).

Referencias

[1] A. Cabrera, I. Märcut y M. A. Salazar, 'On local integration of Lie brackets', Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal) (2018), 27.

[2] J. Fernández, M. Juchani y M. Zuccalli, 'Discrete connections on principal bundles: the discrete Atiyah sequence', J. Geom. Phys. 172 (2022), Paper No. 104417, 27.

[3] S. Kobayashi y K. Nomizu, 'Foundations of differential geometry. Vol. I', Wiley, 1969.